EXERCICES POUR LE MODULE
"CALCUL DIFFÉRENTIEL"

ANNÉE 2015/2016

1. Les parallélogrammes sont des boules

On considère le parallélogramme P de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(2,1),(1,-1),(-2,-1),(-1,1)$. Déterminer une norme sur $\mathbb{R}^2$ pour laquelle ce parallélogramme est la boule unité.

2. Boules unités convexes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $N : E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ une application satisfaisant les deux propriétés suivantes : pour tout $x \in E$

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que N est une norme sur E si et seulement si le sous-ensemble $B := \{x \in E \,|\, N(x) \leq 1\}$ est convexe.

3. Les normes $\|\cdot\|_p$

Soit $p > 0$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

et on note $B_p^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\|_p \leq 1\}$.

a. On suppose que $n = 2$. Dessiner les sous-ensembles B_p^2 pour $p \in \{1/2, 1, 2, 3, \infty\}$.

b. On suppose que $p < 1$. Montrer que B_p^n n'est pas un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme.

c. On suppose que $p \geq 1$. Montrer que $x \mapsto (\|x\|_p)^p$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$ (on pourra commencer avec $n = 1$). En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme.

d. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. À quoi est égal $\lim_{p\to 0} \|x\|_p$?

4. Normes d'applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. On note $L := L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel que l'on munit de la norme suivante : pour $f \in L$

$$\|f\|_L := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F.$$

a. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 4x - 2y + z$. On suppose $\mathbb{R}$ muni de la norme "valeur absolue". Déterminer la norme de f dans les trois situations où $\mathbb{R}^3$ est munie des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

b. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application linéaire définie par une matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq p}}$.

- Si $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont munis de la norme $\|\cdot\|_1$, montrer que $\|f\| = \max_{1\leq j\leq p}\left(\sum_{i=1}^{q} |m_{i,j}|\right)$.
- Si $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, montrer que $\|f\| = \max_{1\leq i\leq q}\left(\sum_{j=1}^{p} |m_{i,j}|\right)$.

5. Continuité

Justifier la raison pour laquelle les applications suivantes sont continues :

(1) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+xyz}{e^{xy}+1}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
(2) $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$,
(3) $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), A \mapsto AB - BA$, où $B \in M_n(\mathbb{R})$ est fixée,
(4) $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^3$,
(5) $GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$,
(6) $f(x,y) = xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$, si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$,
(7) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

6. Continuité d'une fonction à paramètre

Pour tout $\alpha > 0$ on considère la fonction $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F_\alpha(0,0) = 0$ et

$$F_\alpha(x,y) = \frac{x|y|^\alpha}{x^2+y^4},$$

si $(x,y) \neq 0$.

a. Montrer que F_α est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 2$.

b. Montrer que $\mathbb{R}^2 \times]2,\infty[\to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto F_z(x,y)$ est continue.

7. Exercice (Contrôle Continu 2015)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

c. Est-ce que f est de classe C^1 ?

8. Les applications multilinéaires

a. Parmi les applications de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, désigner lesquelles sont linéaires, bilinéaires ou trilinéaires :

(1) $\varphi(x,y,z) = x_1 + 5y_2 - z_3$

(2) $\varphi(x,y,z) = x_1y_3 + (y_2 + x_3)z_1 + (z_3 - x_2)y_1$

(3) $\varphi(x,y,z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$

(4) $\varphi(x,y,z) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$

(5) $\varphi(x,y,z) = (y_2 + 4y_3)(2x_1 - 3x_2)(z_1 + z_3)$

Ici $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et idem pour $y, z \in \mathbb{R}^3$.

b. Soient E et F deux espaces vectoriels muni respectivement des bases $B_E := \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $B_F := \{f_1, \ldots, f_p\}$.

• Déterminer une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E \times F, \mathbb{R})$ des applications linéaires de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$.

• Déterminer une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}^2(E \times F, \mathbb{R})$ des applications bilinéaires de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$.

9. Calcul de dérivées partielles

a. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(0) = (1, 0)$ et $f(t) = (\sin(t)/t, t \ln|t|)$. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$? Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

b. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - 3xy + y$. Soit $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée directionnelle $\partial_u f$ au point $(1, 2)$. En déduire la valeur de la différentielle de f en $(1, 2)$. Calculer la dérivée en 0 de la fonction $g(t) = f(e^t, 2\cos(t))$.

c. On considère la fonction déterminant det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $E_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ayant un seul coefficient non nul : celui qui est à la i-ème ligne, j-ème colonne et valant 1. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction det par rapport à $E_{i,j}$.

d. On considère la fonction définie par $F(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $F(0, 0) = 0$. Montrer que F admet des dérivées directionnelles $\partial_u F(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $u \in \mathbb{R}^2$. Est-ce que F est différentiable en $(0, 0)$?

10. Calcul de différentielles

a. Pour les fonctions suivantes, donner leur domaine de définition et calculer leur différentielle.

(1) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y}}{1 - x^2}$

(3) $f(x, y) = \left(\sqrt{x + e^y}, xy, \cos(x^2)\right)$

(2) $f(x, y, z) = \left(\sin(x + 2y), \sqrt{yz}\right)$

b. Déterminer les matrices jacobiennes des applications suivantes :

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x + y)\cos(y - x)$

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (e^t, t)$

(3) $f \circ g$ et $g \circ f$

11. Applications homogènes

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f(tx) = t^\alpha f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $t \in]0, \infty[$.

a. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ homogène de degré 1. On suppose de plus que f est différentiable en 0. Montrer qu'alors f est une application linéaire. Application : est-ce qu'une norme $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ peut être différentiable en 0 ?

b. (Identité d'Euler) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que l'on suppose différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si on a

$$df(x)x = \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

12. Applications à coefficients matriciels

a. On considère l'espace vectoriel $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Calculer la différentielle de $\pi_k : S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^k$.

- Montrer que l'application $d\pi_2(A) : S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ est inversible si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

b. On considère la fonction déterminant det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

- Justifier le fait que la fonction det est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$.

- Calculer $d(\det)(A)$. On commencera avec $A = Id$, ensuite A inversible et puis A quelconque dans $M_n(\mathbb{R})$.

c. On considère la fonction inverse $i : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$.

- Justifier le fait que la fonction i est différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$.

- Calculer $d(i)(A)$. On commencera avec $A = Id$, puis A quelconque dans $GL_n(\mathbb{R})$.

13. Applications contractantes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension fini. Soit $D \subset E$ une partie fermée.

a. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\rho \in [0,1[$ tels que $\|u_{k+1} - u_k\| \leq C\rho^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On considère une application $f : D \to E$ qui est *contractante* : il existe $\rho \in [0,1[$ tels que $\|f(x) - f(y)\| \leq \rho\|x - y\|$ pour tout $x, y \in D$.

b. On suppose que $f(D) \subset D$. On considère la suite définie par récurrence : $u_{k+1} = f(u_k)$ et $u_o \in D$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c. En déduire que $\{x \in D,\ f(x) = x\}$ est réduit à un seul élément si $f(D) \subset D$.

14. Applications contractantes : exemples

a. On considère les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ et $f_2(x) = \cos(x) + x$. Pour chaque $i = 1, 2$ déterminer un intervalle $D_i \subset \mathbb{R}$ sur lequel f_i est contractante et pour lequel on a $f_i(D_i) \subset D_i$.

b. On considère l'application linéaire $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_c(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, cy\right)$.

a) Montrer que f_c est contractante par rapport à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ si $c \in \left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

b) Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'application f_c n'est pas contractante par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

c. On considère l'application $f(x, y) = \left(y^2 - \frac{x}{2}, xy\right)$.

a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que f est contractante sur la boule fermée $B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$.

b) Montrer que la fonction f admet un unique point fixe dans $B(0, r)$.

15. Équations

a. Déterminer les fonctions $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant les relations
$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = e^x + \sin(y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x\cos(y) + y$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b. Déterminer les fonctions $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ satisfaisant la relation $x\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $f(x, y) = c(x^2 + y^2)^\alpha$.

16. Dérivées partielles d'ordre 2

a. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $F(0, 0) = 0$.

a) Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$.
Est-ce que $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0)$?

b) Est-ce que la différentielle seconde $d^2F(x, y)$ existe en $(x, y) = (0, 0)$?

b. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = y^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$ et $F(x, 0) = 0$.

a) Étudier l'existence des dérivées partielles premières et secondes de F.

b) Déterminer le plus grand domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel F est C^1, C^2.

c. On considère la fonction sur $M_n(\mathbb{R})$ définie par $g(X) = \mathrm{Tr}(X^3)$.

a) Calculer les différentielles premières et secondes $dg(X)$ et $d^2g(X)$.

b) On se place en $X = Id$. Déterminer la signature de la forme quadratique $h \mapsto d^2g(Id)(h,h)$.

17. Fonctions convexes

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $g : D \to \mathbb{R}$ est convexe si on a $g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$ pour tout $x, y \in D$ et tout $t \in [0,1]$.

a. On suppose que $g : D \to \mathbb{R}$ est différentiable. Montrer que g est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in D$ on a $g(x) - g(y) \geq dg(y)(x-y)$.

b. On suppose que $g : D \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable. Montrer que g est convexe si et seulement si pour tout $x \in D$ la Hessienne $h \mapsto d^2g(x)(h,h)$ est positive.

c. Montrer que la fonction $g :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ est convexe.

18. Extrema

a. Déterminer les extrema globaux de la fonction $F(x,y) = x^4 - y^4$ sur le domaine $D := \{(x,y),\ x^2 + \sqrt{3}y^2 \leq 1\}$.

b. Étudier les extrema locaux et globaux des fonctions définies par :

- $f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$,
- $f_2(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$,
- $f_3(x,y) = y(x^2 + \ln(y)^2)$ sur $\mathbb{R}\times]0,\infty[$,
- $f_4(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 2x - y$ sur $\mathbb{R}^2$ et sur le domaine $[0,1] \times [0,2]$.

c. Déterminer $\inf_{x>0,y>0}(1/x + 1/y + xy)$.

d. Trouver les points de la surface $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y^2 = 9 + xz\}$ qui sont les plus proches de l'origine de $\mathbb{R}^3$.

19. Exercice (Examen juin 2015)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par la relation : pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n.$$

À $s > 0$ on associe le sous-ensemble $K_s := \left\{x \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0\ \forall i,\ \text{et}\ \sum_{i=1}^n x_i \leq s\right\}$.

a. Montrer que K_s est un compact de $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer que $\sup\{f(x), x \in K_s\}$ est atteint en un point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_i > 0,\ \forall i$ et $\sum_{i=1}^n a_i = s$. Calculer $\sup\{f(x), x \in K_s\}$.

c. En déduire l'inégalité ci-dessous (que l'on appelle inégalité arithmético-géométrique) :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

pour tout $x_1, \ldots, x_n$ positifs.

20. Exercice (Contrôle Continu 2015)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$.

a. Déterminer les points critiques de f.

b. Déterminer les extrema locaux de f.

c. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ le carré formé des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le 1$. Déterminer $\mathrm{Max}_{(x,y)\in C} f(x, y)$ et $\mathrm{Min}_{(x,y)\in C} f(x, y)$.

d. Déterminer $\mathrm{Inf}_{x\ge 0, y\ge 0} f(x, y)$.

21. Fonctions harmoniques

Pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, le laplacien de f est la fonction définie par la relation

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

La fonction f est dite harmonique si $\Delta f = 0$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que les fonctions $F_n(x, y) = \mathrm{Re}((x + iy)^n)$ et $G_n(x, y) = \mathrm{Im}((x + iy)^n)$ sont harmoniques.

b. On travaille avec $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et une fonction de la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = g\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)$ avec $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2. Déterminer lesquelles sont harmoniques.

c. On considère le changement de variables en polaires $\varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $F = f \circ \varphi$. Exprimer Δf en fonction de $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

d. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui est n-homogène : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ pour tout $\lambda > 0$. Montrer que f est harmonique si et seulement si $f \in \mathrm{Vect}(F_n, G_n)$.

22. Exercice (Examen mai 2015)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in U$. Soit $R > 0$. On notera $D_R := \{(x, y); x^2 + y^2 \le R^2\}$ le disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0, 0)$ et de rayon R, et $C_R := \{(x, y); x^2 + y^2 = R^2\}$ le bord de D_R.

a. Montrer que la fonction $F(x, y) = e^{x-y}\cos(x + y)$ est harmonique.

b. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $h : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = g(\frac{y}{x})$.

(i) Montrer que h est harmonique si et seulement si g satisfait l'équation différentielle

$$g''(t) + \frac{2t}{1 + t^2} g'(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Trouver les fonctions g rendant h harmonique.

c. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Pour chaque entier $k \ge 1$, on considère $\varphi_k(x, y) = \varphi(x, y) + \frac{1}{k}(x^2 + y^2)$.

(i) Justifier que φ et φ_k admettent un maximum sur D_R, que l'on notera respectivement $\max_{D_R} \varphi$ et $\max_{D_R} \varphi_k$. Montrer que $|\max_{D_R} \varphi - \max_{D_R} \varphi_k| \le \frac{R^2}{k}$.

(ii) Supposons que $\max_{D_R} \varphi_k$ est atteint en un point (a, b) qui est à l'intérieur du disque D_R. Montrer que $\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2}(a, b) \le 0$ et $\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2}(a, b) \le 0$.

d. Dans cette question, on suppose que φ est harmonique.

(i) Montrer que pour tout $k \ge 1$, $\max_{D_R} \varphi_k$ est atteint sur le cercle C_R.

(ii) Montrer que $\max_{D_R} \varphi$ est atteint sur le cercle C_R.

23. Difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1.

a. On suppose que l'application F est propre. C'est à dire que pour tout tout compact K de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $F^{-1}(K)$ est compact. Montrer alors que l'image de F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

b. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la différentielle $dF(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bijective. Montrer alors que l'image de F est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

c. On suppose que la fonction F satisfait les conditions des points **a.** et **b.**. Que peut-on conclure sur l'image de F ?

d. Le Théorème de Hadamard-Levy nous assure qu'une application f vérifiant les conditions des points **a.** et **b.** est injective. Que peut-on alors conclure sur f ?

24. Difféomorphismes : exemples

a. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|ab| < 1$. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = (x + a\sin(y), y + b\sin(x)).$$

i) Montrer que F est injective.

ii) Montrer que l'application F est propre.

iii) Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui même.

b. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$ est un difféomorphisme sur son image que l'on déterminera.

c. On considère l'espace vectoriel E des matrices symétriques réelles 2×2. On considère l'ouvert $U \subset E$ formé des matrices symétriques définies positives, et l'application $\phi : U \to E$ définie par $\phi(X) = X^2$.

i) Soit $X \in U$. En utilisant le fait que X est diagonalisable, montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $X = aId + bX^2$. En déduire que ϕ est injective.

ii) Montrer que $\phi(U) = U$.

iii) Montrer que ϕ définit un difféomorphisme de U sur lui-même.

d. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$ avec $A(x, y) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{x+iy} + e^{-x-iy})$ et $B(x, y) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(e^{x+iy} + e^{-x-iy})$. Montrer que F détermine un difféomorphisme de $U := \{x > 0, 0 < y < 2\pi\}$ sur l'ouvert $F(U)$ que l'on déterminera.

25. Difféomorphismes : autres exemples

Soit $c > 0$ une constante. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 satisfaisant la relation

$$\|f(a) - f(b)\| \geq c\|a - b\|, \quad \text{pour tout } a, b \in \mathbb{R}^n.$$

a. Montrer que f est injective.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la différentielle $df(x)$ est inversible. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

c. Montrer qu'une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si et seulement si $(f(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

d. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

26. Exercice (Examen juin 2015)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \left(x + \frac{1}{y^2 + 1}, y + \frac{1}{x^2 + 1}\right).$$

a. Montrer que $\frac{a+b}{(a^2+1)(b^2+1)} < 1$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que f est injective.

b. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la différentielle $df(x, y)$ est inversible. En déduire que $f(\mathbb{R}^2)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

c. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f(x, y)\| \geq \|(x, y)\| - C$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que $f(\mathbb{R}^2)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

d. Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

27. Fonctions implicites

a. On considère le sous-ensemble $C := \{\cos(xy) + \sin(xy) = y\}$. Montrer que si $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ il existe un unique $y = \phi(x)$ tel que $(x, y) \in C$. Justifier le fait que ϕ est de classe C^∞.

b. On considère l'ensemble $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + 3x + y = 0\}$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tel que $(x, y) \in C \iff y = \varphi(x)$. Déterminer le DL de φ en $x = 0$ à l'ordre 3.

c. On considère le sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^3$ défini par les relations : $x^2 + 3y^2 - z^2 = 1$ et $xyz = 1$. Soit $(a, b, c) \in M$. Montrer qu'il existe des fonctions Φ_1, Φ_2 définies sur un intervalle $]a - \epsilon, a + \epsilon[$ et un voisinage ouvert U de (a, b, c) tel que

$$(x, y, z) \in U \cap M \iff y = \Phi_1(x) \quad \text{et} \quad z = \Phi_2(x).$$

Quelle est la droite tangente à M au point (a, b, c) ?

d. On considère l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$, puis la surface S d'équation $F(x, y, z) = 0$.

(i) Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, 1)$.

(ii) Vérifier qu'au voisinage du point $(1, 1, 1)$, la surface S est décrite par une équation de la forme $z = \varphi(x, y)$ où φ est une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de $(1, 1)$.

(iii) Écrire le développement limité de φ à l'ordre 2 au point $(1, 1)$.

(iv) Donner la matrice Hessienne de φ au point $(1, 1)$.

(v) Quelle est la position de S par rapport à son plan tangent au point $(1, 1)$?

28. Extrema liés

a. Trouver les extrema globaux de la fonction $f(x, y) = xy$ sur l'ellipse $\mathcal{E} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = 1\}$.

b. Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, montrer que le réel

$$\lambda := \sup_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$$

est une valeur propre de A, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.

c. Soit $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 5,\ x^2 + y^2 - 2z = 0\}$, ϕ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 5, x^2 + y^2 - 2z)$, et f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = y + z$.

(i) Montrer que M est une partie compacte de $\mathbb{R}^3$.
(ii) Montrer qu'en tout point de M, le rang de la différentielle de ϕ est 2.
(iii) Trouver tous les points d'extremum de f et préciser leur nature.

29. Exercice (Examen mai 2015)

Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y, z) = (x + z)y$. On considère le domaine $D := \{(x, y, z);\ x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 1\}$ et son bord $B := \{(x, y, z);\ x^2 + 3y^2 + z^2 = 1\}$.

a. Déterminer l'équation de l'espace tangent à B en un point $(a, b, c) \in B$.

b. Justifier que φ admet un maximum sur D que l'on notera $\max_D \varphi$.
Montrer que ce maximum est atteint sur B.

c. Déterminer $\max_D \varphi$.

30. Équations linéaires du premier ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y' - 2y = te^t, \qquad y' + 2y = \cos(t), \qquad (1+t^2)y' = 2ty + 5(1+t^2).$$

31. Recollement

a. On considère l'équation différentielle $ty' - 4y = t^2 \quad (E)$

(i) Résoudre (E) sur les intervalles $\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{<0}$

(ii) Déterminer les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$.

b. On considère l'équation différentielle $t(t^2-1)y' + 2y = t^2 \quad (E')$

(i) Résoudre (E') sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant ni 1, ni 0, ni -1.

(ii) Déterminer les solutions de (E') définies sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur $]-1,1[$).

32. Solutions périodiques

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t),$$

où $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues 2π-périodiques. On note S_E l'ensemble des solutions de (E), et S'_E le sous-ensemble formé des solutions 2π-périodiques.

a. On suppose que a n'admet pas de primitive 2π-périodique. Montrer alors que S'_E contient un seul élément.

b. On suppose que a admet des primitives 2π-périodiques. Montrer que l'ensemble S'_E est soit vide soit égal à S_E.

33. Variables séparées

a. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = y^2 - 1, \qquad y' = \tan(t)y, \qquad y' = t^2\sqrt{1-y^2}, \qquad y' = \sin(y).$$

b. Montrer que l'équation différentielle

$$y' = \frac{y+t}{y-t}$$

se ramène à une équation différentielle à variables séparées, puis la résoudre.

34. Équations linéaires du second ordre

a. Intégrer les équations différentielles suivantes :

(i) $y'' + y = |t|$,

(ii) $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3t}}{\sqrt{1+t^2}}$,

(ii) $y'' - 2y' + 5y = te^t\cos(t)^2$.

35. Zéros d'une solution

On considère une solution non-nulle φ de l'équation différentielle $y'' - q(t)y = 0$. Ici q désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que tout zéro de φ est simple.

b. Supposons que $q(t) > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

(*i*) Montrer que φ^2 est convexe. Est-ce que φ peut être bornée ?

(*ii*) Montrer que φ admet au plus un zéro.

36. Polynômes de Legendre

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'équation différentielle

$$(E_n) \qquad (1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0.$$

On considère le polynôme $P_n = \frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]$, et on note L l'opérateur défini par $L(y) = ((t^2-1)y')'$.

a. Quel est le lien entre l'opérateur L et les solutions de (E_n) ?

b. Montrer que (E_n) admet une unique solution polynomiale ayant son coefficient dominant égal à 1.

c. (∗∗) Si on pose $U_n = (t^2-1)^n$, vérifier la relation $(t^2-1)U_n'(t) = 2n\,t\,U_n(t)$. En dérivant $(n+1)$-fois cette dernière relation, montrer que P_n satisfait l'équation différentielle (E_n).

d. Soit φ une solution de (E_n) définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction φ est proportionnelle à P_n.
On pourra considérer le Wronskien :

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} P_n(t) & \varphi(t) \\ P_n'(t) & \varphi'(t) \end{pmatrix}.$$

37. Systèmes différentiels

Soient x, y, z des fonctions de t. Résoudre les systèmes :

$$(A)\begin{cases} y' = -y + z \\ z' = y - 2z - 1 \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} y' = y + z + \sin(t) \\ z' = -y + 3z \end{cases} \qquad (C)\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$$

$$(E)\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z \end{cases} \qquad (F)\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases} \qquad (G)\begin{cases} x' = 2x + y + z + \mathrm{sh}(t) \\ y' = x - y - z + \mathrm{ch}(t) \\ z' = -x + 2y + 2z - \mathrm{ch}(t) \end{cases}$$

38. Exercice (Examen mai 2015)

On considère les systèmes différentiels

$$(A)\begin{cases} x' = 4x - 9y \\ y' = x - 2y \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} x' = 4x - 9y \\ y' = x - 2y + e^t \end{cases}$$

où x, y sont des fonctions de t.

a. Déterminer la forme générale des solutions de (A).

b. Déterminer la solution de (B) satisfaisant la condition initiale $x(0) = y(0) = 0$.

39. Exercice (Examen juin 2015)

On considère les systèmes différentiels

$$(A)\quad \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2y - 4z \\ z' = y - 2z \end{cases} \qquad (B)\quad \begin{cases} x' = x + y + z + 1 \\ y' = 2y - 4z + 1 \\ z' = y - 2z + 1 \end{cases}$$

où x, y, z sont des fonctions de t.

a. Déterminer la forme générale des solutions de (A).

b. Calculer l'exponentielle $t \mapsto e^{tM}$ où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

c. Déterminer la solution de (B) satisfaisant la condition initiale $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

40. Changement de variable

a. $y'' - y' - e^{2t}y = e^{3t}$ (poser $x = e^t$).

b. $t^2y'' + 2ty' + y = t^3$ (poser $x = \ln(t)$).

41. Exercice (Examen mai 2015)

On étudie sur $I =]0, \infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad t^2y''(t) + ty'(t) + y(t) = \frac{1}{t}.$$

a. Les solutions de (E) sont-elles globales sur I ? Que peut-on dire en général de l'espace des solutions ?

b. Montrer que le changement de variable $t = e^u$, $z(u) = y(e^u)$ permet de ramener (E) à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

c. Résoudre le problème de Cauchy pour (E) avec la condition initiale : $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$.

42. Valeurs propres.

On considère $(\star)$ $\quad y'' + 2ty' + (t^2 - 1)y = 0$. Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, et l'endomorphisme $\Phi : E \to E$ défini par $\Phi(f)(t) = f'(t) + tf(t)$.

a. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

b. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.

c. Résoudre $(\star)$.

43. Équation différentielle $y'' + p(t)y = 0$

a. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^\infty |p(t)|dt < \infty$. Montrer que l'équation différentielle $y'' + p(t)y = 0$ admet des solutions non bornées.
(Raisonner par l'absurde en utilisant le Wronskien).

b. On suppose que p est une fonction positive. Montrer que toute solution de $y'' + p(t)y = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

c. Soient f, g deux solutions indépendantes de $y'' + p(t)y = 0$. Si $\alpha < \beta$ sont deux zéros consécutifs de f, montrer qu'il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $g(\gamma) = 0$.

44. Exercice (Examen juin 2015)

On fixe une fonction *paire* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(t) + q(t)y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Donner une équation différentielle linéaire matricielle d'ordre 1 dont la résolution équivaut à celle de (E).

b. Vérifier que si y est une solution de (E), alors $t \mapsto -y(-t)$ est aussi une solution de (E).

c. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer qu'une solution y est une fonction impaire si et seulement si $y(0) = 0$.

d. Montrer que l'espace des solutions de (E) ne peut pas admettre une base de solutions constituée de fonctions impaires.

e. Montrer que l'espace des solutions de (E) ne peut pas admettre une base de solutions constituée de fonctions paires.

45. Utilisation du Wronskien

a. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit φ une solution non-nulle de l'équation différentielle $(E) :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. À toute fonction y de classe C^2 sur I on associe le Wronskien $W(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi(t) & y(t) \\ \varphi'(t) & y'(t) \end{pmatrix}$. Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si $W'(t) = -a(t)W(t)$.

b. Résoudre l'équation différentielle $(E) :\ t(t+1)y'' - y' - 2y = 0$ en cherchant une solution de la forme $\varphi(t) = t^\alpha$ et en appliquant ensuite le procédé décrit précédemment.

46. Lemme de Gronwall

a. Soient f et a deux fonctions continues sur l'intervalle $[0, T]$, avec a positive. On suppose que pour tout $t \in [0, T]$ on a $f(t) \leq \lambda + \int_0^t a(s)f(s)ds$ pour une certaine constante $\lambda \geq 0$. Montrer alors que pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$f(t) \leq \lambda \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right).$$

On pourra se ramener au cas $\lambda = 0$ en considérant la fonction $F(t) := f(t) - \lambda \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$.

b. On considère l'équation différentielle $(E) :\ y'' + p(t)y = 0$ où $p(t) = 1 - a(t)$ avec $\int_0^\infty |a(t)|dt < \infty$.

i) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que les solutions de (E) satisfont une certaine équation fonctionnelle en prenant $\varphi(t) = a(t)y(t)$. En déduire que toute solution de (E) est bornée sur $[0, \infty[$.

c. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\| + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

47. Lotka-Volterra

On considère le système différentiel

$$(V) \qquad \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1) \end{cases}$$

dont on cherche les solutions (x, y) définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}_{>0})^2$.

(i) Déterminer une fonction $F : (\mathbb{R}_{>0})^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour toute solution (x, y) de (V), la fonction $t \mapsto F(x(t), y(t))$ soit constante.
(ii) Montrer que les solutions de (V) sont périodiques.

48. Équation du pendule

Soit φ la solution maximale du système

$$\begin{cases} y'' + \sin(y) = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

i) Vérifier que la fonction $(\varphi, \varphi') \mapsto \frac{1}{2}(\varphi')^2 - \cos(\varphi)$ est constante.

ii) Montrer que φ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

iii) Montrer que φ est une fonction impaire et périodique.