GLMA601/615, L3 Analyse, 2013-2014
Feuille TD $n°1$
Normes et continuité

Les exercices marqués d'une étoile ($\star$) peuvent ne pas être abordé en première lecture (exercices de rappels, à la limite du programme, redondants ou plus difficiles).

Partie I : Espaces vectoriels normés

Exercice 1. ($\star$) *Les normes* $1, 2$ *et infini de* $\mathbb{R}^n$. On note $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ les applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^+$ définies, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

(1) Rappeler pourquoi ces trois applications sont des normes de $\mathbb{R}^n$.

(2) Dessiner les boules unités de ces normes pour $n = 2$.

(3) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

En déduire (sans utiliser de théorème général) que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 2. ($\star$) *Les normes* $\|.\|_p$ *et l'inégalité de Minkowski*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty[$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = (|x|_1^p + \cdots + |x|_n^p)^{1/p}.$$

Si p vaut 1 ou 2, on retrouve les normes 1 et 2 de l'exercice 1.

(1) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

(2) Soient $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux élements non nuls de $\mathbb{R}^n$. Posons $\alpha = \|x\|_p, \beta = \|y\|_p$, et notons :

$$\overline{x} = \frac{x}{\alpha}, \overline{y} = \frac{y}{\beta}, \lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

(i) Montrer que $\|x + y\|_p^p = (\alpha + \beta)^p \|\lambda\overline{x} + (1 - \lambda)\overline{y}\|_p^p$.

(ii) En utilisant la convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ (pour $p > 1$), montrer que

$$\|\lambda\overline{x} + (1 - \lambda)\overline{y}\|_p^p \leq 1.$$

(iii) En déduire l'*inégalité de Minkowski* :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

puis que $\|.\|_p$ est une norme de $\mathbb{R}^n$.

(3) Que deviendrait l'inégalité de Minkowski si nous prenions $0 \leq p < 1$.

(4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall p \in [1, +\infty[, \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty.$$

En déduire (sans utiliser de théorème général) que toutes les normes $\|x\|_p$ sont équivalentes.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux applications de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|.\|_1 \ &: f \longmapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \\ \|.\|_\infty \ &: f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

(1) Montrer que $\mathcal{C}$ est de dimension infinie (considérer, par exemple, les fonctions polynomiales).

(2) Vérifiez que les deux applications $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes de l'espace vectoriel $\mathcal{C}$.

(3) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes ; on considérera la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $f_n(t)$ est affine entre 0 et $1/n$, vérifie $f_n(0) = n$ et est constante égale à 0 sur $[1/n, 1]$.

Partie II : Applications linéaires continues

Exercice 4. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme $\|.\|_1$ et on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} u \ : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(0) \end{aligned}$$

(1) Vérifier que u est linéaire.

(2) En considérant la même suite de fonctions f_n que dans l'exercice 3, montrer que u n'est pas continue.

Exercice 5. *Normes d'applications linéaires continues.*

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note $\overline{B}(0_E, 1)$ la boule unité de E.

Pour toute application u de $L(E,F)$, on pose :

$$|||u||| := sup\{\|u(x)\|_F, x \in \overline{B}(0_E, 1)\}.$$

Cela définit une norme sur $L(E,F)$.

(1) Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x,y,z) = -4x + 2y - z$. On suppose $\mathbb{R}$ muni de la norme "valeur absolue". Déterminer la norme de u dans les trois situations où $\mathbb{R}^3$ est munie des normes $1, 2$ et infinie.

(2) $(\star)$ Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y,z) = (x+2y+3z, -5x+y-2z)$. Déterminer la norme de u dans toutes les situations (quatre en tout) où $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis soit de la norme 1, soit de la norme infini.

Exercice 6. *Normes matricielles.* Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ définie par une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i\leq q, 1\leq j\leq p}$.

(1) Si $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont munis de la norme $||.||_1$, montrer que $|||u||| = \max_{1\leq j\leq p}(\sum_{i=1}^{q} |m_{ij}|)$.

(2) Si $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont munis de la norme $||.||_\infty$, montrer que $|||u||| = \max_{1\leq i\leq q}(\sum_{j=1}^{p} |m_{ij}|)$.

Partie III : Applications multilinéaires

Exercice 7. Montrer que le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est bilinéaire.

Exercice 8. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application φ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est linéaire, bilinéaire ou trilinéaire, et pour quels espaces de départ.

(1) $\varphi((x_1;x_2;x_3);(y_1;y_2;y_3);(z_1;z_2;z_3)) = x_1 + y_2 + z_3$
(2) $\varphi((x_1;x_2;x_3);(y_1;y_2;y_3);(z_1;z_2;z_3)) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$
(3) $\varphi((x_1;x_2;x_3);(y_1;y_2;y_3);(z_1;z_2;z_3)) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$
(4) $\varphi((x_1;x_2;x_3);(y_1;y_2;y_3);(z_1;z_2;z_3)) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$
(5) $\varphi((x_1;x_2;x_3);(y_1;y_2;y_3);(z_1;z_2;z_3)) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$
(6) $\varphi((x_1;x_2;x_3);(y_1;y_2;y_3);(z_1;z_2;z_3)) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$
(7) $\varphi((x_1;x_2;x_3);(y_1;y_2;y_3);(z_1;z_2;z_3)) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

Exercice 9. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi\ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt. \end{aligned}$$

(1) Montrer que φ est bilinéaire.
(2) On muni $\mathbb{R}$ de la norme "valeur absolue", $\mathcal{C}$ de la norme 1 et $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ de la "norme sup" du produit $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. φ est-elle continue ?
(3) Même question en munissant $\mathcal{C}$ de la norme sup $\|.\|_\infty$.

Exercice 10. ($\star$) Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finies respectives $p, q, r \in \mathbb{N}$. Soit $L(E,F;G)$ l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ vers G.

(1) Montrer que $L(E,F;G)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(2) On suppose $r = 1$, et on fixe des bases de E et F. Montrer que $L(E,F;G)$ est isomorphe à l'espace des matrices de tailles $p \times q$. En déduire $\dim L(E,F;G)$
(3) Calculer $\dim L(E,F;G)$ dans le cas général.

Partie IV : Graphes et continuité

Exercice 11. Représenter les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \ln(2x+y-2), \qquad f_2(x,y) = \sqrt{1-xy}$$
$$f_3(x,y) = \frac{\ln(y-x)}{x}, \qquad f_4(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Exercice 12. Représenter les lignes de niveau (c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x,y) = k$) pour :

$$f_1(x,y) = y^2, \text{ avec } k = -1 \text{ et } k = 1$$
$$f_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} \text{ avec k} = 2.$$

Exercice 13.

(1) représenter les lignes de niveaux des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned} f\ &: (x,y) \longmapsto x^2+y^2 \\ g\ &: (x,y) \longmapsto xy \\ h\ &: (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) Donner l'allure du graphe de f et g au voisinage de $(0,0)$.

(3) Donner l'allure du graphe de h sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ au voisinage de $(0,0)$.

(4) La fonction h est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 14. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(y) & \text{si } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \text{ et } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Dessiner son graphe

(2) Montrer que f est continue en tout point $(x, \pi/2)$ avec $x \geq 0$ et discontinue en tout point $(0,y)$ avec $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Exercice 15.

(1) Montrer que si x et y sont des réels, on a : $2|xy| \leq x^2+y^2$

(2) Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :

$$|f(x,y)| \leq 4\|(x,y)\|^2,$$

où $\|(x,y)\|^2 = \sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice 17. Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

(1) $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

(2) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

(4) $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

GLMA601, L3 ANALYSE, 2013-2014
FEUILLE TD $n°2$
DIFFÉRENTIABILITÉ

Partie I : Différentielles et dérivées partielles

Exercice 1. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vérifie :

$$f(t) = (\sin(t)/t, \exp(2t), t \ln |t|)$$

pour tout t non nul. A quoi doit être égal $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ? Sous cette condition, l'application f est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y.$$

(1) La fonction f admet-elle des dérivées directionnelles en tout point de $\mathbb{R}^2$ suivant tous les vecteurs ?

(2) Soit $u = (a, b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$; Calculer, à l'aide de la définition, la dérivée directionnelle de f au point $(1, 2)$ suivant u.

(3) En déduire la différentielle de f en $(1, 2)$.

(4) En déduire les valeurs des dérivées partielles en $(1, 2)$: $\partial_1 f(1, 2), \partial_2 f(1, 2)$.

Exercice 3. Expliquer pourquoi chacune des fonctions suivantes est différentiable au point indiqué, et calculer la différentielle en ce point :

(1) $f(x, y) = x\sqrt{y}$ au point $(1, 4)$,

(2) $f(x, y) = x/y$ au point $(6, 3)$

(3) $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ au point $(\pi, 0)$

(4) $f(x, y) = \sqrt{x + e^y}$ au point $(1, 0)$.

Exercice 4. Pour les quatre fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous, répondre aux questions suivantes :

(1) Cette fonction admet-elle des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$? Si oui, les calculer.

(2) Cette fonction admet-elle en tout point des dérivées directionnelles suivant tout vecteur ?

(3) Cette fonction est-elle continue ?

(4) En quels points cette fonction est-elle différentiable ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(pour u, on pourra considérer la restriction de u à la parabole d'équation $y = x^2$ paramétrée par $t \longmapsto (t, t^2)$).

Exercice 5. Déterminer les matrices jacobiennes des applications suivantes :

(1) $f \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\cos(y-x)$,

(2) $g \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(t) = (\cos t, \sin t, t)$,

(3) $h \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = (xy, e^x \cos y)$,

Partie II : Calculs de différentielles

Exercice 6. On considère une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, et on définit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $g(x,y,z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$ Montrer que g est différentiable, et que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \partial_1 g(t,t,t) + \partial_2 g(t,t,t) + \partial_3 g(t,t,t) = 0.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On définit des fonctions $g \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x,y) := f(y,x)$ et $h(x,y) := f(x,-x)$. Montrer que g et h sont différentiables, et déterminer leurs différentielles en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/\|x\|$, où la norme est la norme euclidienne (norme 2). Montrer que f est différentiable, et déterminer sa différentielle.

Exercice 9. *Différentiabilité des applications homogènes.*

On dit qu'une application $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est positivement homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si $g(tx) = t^\alpha g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}^{*+}$.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable en 0, telle que $f_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ est positivement homogène de degré 1.

Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est linéaire.

(2) Une norme sur $\mathbb{R}^n$, vue comme application $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, peut-elle être différentiable à l'origine ?

Exercice 10. *Identité d'Euler pour les applications homogènes.*

Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que f est homogène de degré $\alpha > 0$ si et seulement si :

$$df(x)x = \alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Exercice 11. Soit n un entier strictement positif. Montrer que l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^tAA$ est différentiable. Calculer sa différentielle.

Exercice 12. *Forme bilinéaire.*

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. Soit l'application

$$\begin{aligned} f \ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (U,V) &\mapsto {}^tUMV \end{aligned}$$

où les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont écrits en colonne. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est différentiable, et calculer

$$df(e_1, e_1)(e_2, e_2).$$

Exercice 13. (*) *L'application "inverse d'une matrice carrée".*

On choisit une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, par exemple $\|.\|_\infty$, et on munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur subordonnée. On note $GL(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des matrices inversibles, et I la matrice identité. On définit enfin l'inversion $f : GL(\mathbb{R}^n) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ par $f(A) = A^{-1}$.

(1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1$. Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} A^k$ est normalement convergente dans $M_n(\mathbb{R})$, et en déduire qu'elle converge. Que vaut $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k)$? En déduire que $I - A$ est inversible, ie. que $I - A \in GL(\mathbb{R}^n)$, et que de plus

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k\geq 0} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

(2) En déduire que $GL(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que l'inversion f est différentiable en I, puis en n'importe quel point de $GL(\mathbb{R}^n)$. Quelle est sa différentielle ?

GLMA601, L3 Analyse, 2013-2014
Feuille TD $n°3$

Partie I : Fonctions de classes $\mathcal{C}^1$

Exercice 1. Montrer que les deux fonctions f et g suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^3/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x\sin y)/y & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient

$$x\partial_1 f(x,y) + y\partial_2 f(x,y) = x^4 + 2y^4$$

Exercice 3. (*) Soit det : $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminant.

(1) Montrer que det est de classe $\mathcal{C}^1$, et même $\mathcal{C}^\infty$.

(2) Calculer $\partial(\det)/\partial x_{i,j}(A)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, en s'aidant du développement du déterminant suivant une ligne (ou une colonne).

(3) Montrer que $d(\det)(A)H = \mathrm{Trace}({}^t\mathrm{Com}(A)H)$.

Partie II : Accroissements finis

Exercice 4. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si a, b sont deux points de U tels que $[a,b] \in U$, montrer qu'il existe un point $c \in [a,b]$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b-a)$.

Exercice 5. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soient $x, y \in U$ tels que $[x,y] \in U$. Montrer que :

$$\|f(y) - f(x) - df(x)(y-x)\| \leq \|y-x\| \sup_{z\in[x,y]} |||df(z) - df(x)|||.$$

Exercice 6. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) := \left(\frac{\sin(x+y)}{2}, \frac{\cos(x-y)}{2}\right)$$

est k-lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$, lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|\|_2$. En déduire que f admet un unique point fixe (considérer la suite $u_n := f^n(a)$ où a est un point quelconque de $\mathbb{R}^2$).

Que se serait-il passé si on avait choisi la norme $\|\|_\infty$ ou la norme $\|\|_1$?

Exercice 7. (*) Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est elle-même convexe si, par définition, on a :

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y) \qquad \forall x,y \in U, t \in [0,1]$$

Montrer que, si f est différentiable sur U, alors f est convexe si et seulement si elle vérifie $f(y)-f(x) \geq df(x)(y-x)$ quels que soient $x,y \in U$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque. Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$. Une subdivision σ de $[a,b]$ est la donnée de $k+1$ réels $t_0, t_1, \dots, t_k$, avec k entier supérieur ou égal à 1 quelconque, tels que $t_0 = a \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = b$. On écrit $\sigma = (t_0, \dots, t_k)$. A une telle subdivision est associée une ligne brisée dans $\mathbb{R}^n$, dont la longueur est :

$$L(\sigma) := \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

On appelle longueur de γ le nombre $L := \sup L(\sigma)$, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble de toutes les subdivisions σ de $[a,b]$.

(1) Soient $x,y \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Quelle est la longueur de la courbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t) = (1-t)x+ty$?

(2) Montrer que toute courbe de classe $\mathcal{C}^1$ est de longueur finie. Montrer qu'un segment de droite est le plus court chemin pour aller d'un point de $\mathbb{R}^n$ à un autre.

(3) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un $r > 0$ tel que, pour tous les $s,t \in [a,b]$ vérifiant $|t-s| \leq r$, on a : $\|\gamma(t)-\gamma(s)-(t-s)\gamma'(s)\| \leq \epsilon|t-s|$.

(4) En déduire que $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$.

Exercice 9. Montrer que si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\gamma([a,b]) \subset U$, alors sa longueur $L(\gamma)$ vérifie :

$$\|f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\| \leq L(\gamma) \sup_{t\in[a,b]} \|df(\gamma(t))\|$$

Partie III : Différentielles secondes, extrema locaux

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$

(1) Montrer que les dérivées partielles $\partial_1 f(0,y)$ et $\partial_2 f(x,0)$ existent, et les calculer (de la manière la plus économique possible...)

(2) Les dérivées partielles secondes $\partial_{12}^2 f(0,0)$ et $\partial_{21}^2 f(0,0)$ existent-elles ? Qu'observe-t-on ?

(3) Que peut-on en conclure ?

Exercice 11. Pour chacune des fonctions suivantes : déterminer les extréma locaux et globaux.

(1) $f(x,y) = x^4+y^4-4xy+1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$ sur $\mathbb{R}^2$.

(3) $f(x, y) = x^2 + ay^4$ sur $\mathbb{R}^2$, où a est un paramètre réel.

(4) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(5) $f(x, y, z) = (x + y)e^{x+y-z^2}$ sur $\mathbb{R}^3$.

(6) la restriction de $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ au rectangle $[0, 3] \times [0, 2]$.

Exercice 12.

(1) Montrer que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ possède deux maxima locaux, alors elle possède également au moins un minimum local.

(2) Étudier les extrema de $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 13.

(1) Montrer que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un unique extremum local, alors cet extremum est nécessairement un extremum global.

(2) Étudier les extrema de $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ sur $\mathbb{R}^2$. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 14. Trouver les points de la surface $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y^2 = 9 + xz\}$ qui sont les plus proches de l'origine de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15.

(1) Trouver un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, deux fois différentiable à l'origine, telles que $df(0) = 0$ et $d^2f(0) = 0$, et vérifiant de plus la condition "f admet un minimum local non strict en 0".

(2) Même question mais en demandant la condition "f admet un minimum local strict en 0".

(3) Même question mais en demandant la condition "f n'admet pas d'extremum local en 0".

Exercice 16. (*) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le *laplacien* de f par :

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii}^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Soit $B = B(0, 1)$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, de centre 0 et de rayon 1, pour la norme euclidienne $\|.\|$.

(1) On suppose dans cette question que $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in B$. On veut montrer qu'alors $f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un $x \in B$ pour lequel $f(x) \geq max_{\|y\|=1} f(y)$.

(a) Montrer qu'il existe un $x_0 \in B$ qui est un maximum de f sur la boule ouverte B.

(b) En déduire une contradiction en utilisant la propriété suivante : si une matrice symétrique définit une forme quadratique négative, alors la trace de cette matrice est négative.

(c) Question supplémentaire : démontrer la propriété utilisée dans la question précédente, en utilisant le fait que toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée (autrement dit : pour toute matrice symétrique A, il existe une matrice orthogonale P telle que PAP^{-1} soit diagonale).

(2) On suppose maintenant que $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in B$ (on dit que f est *harmonique* sur B). On veut montrer qu'alors

$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y) \qquad \forall x \in B.$$

Pour cela :

(a) Si $\epsilon > 0$, on pose $g_\epsilon(x) := f(x) + \epsilon\|x\|^2$. Appliquer la question (1) et faire tendre ϵ vers 0 pour montrer l'inégalité $f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y) \quad \forall x \in B$

(b) Comment montrer l'autre inégalité ?

GLMA601, L3 Analyse, 2013-2014
Feuille TD $n°4$
Inversion locale et fonctions implicites

Partie I : Théorème d'inversion locale

Exercice 1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3 - 2xy^2, x + y)$ est-elle un difféomorphisme local en $a = (1, -1)$? Si oui, écrire la différentielle de son inverse local au point $b = f(a)$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(1) On note U l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est un difféomorphisme local. Décrire U.

(2) Est ce que f restreinte à U est un difféomorphisme sur son image ?

(3) Pour tout point a de U, écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$, et trouver un voisinage ouvert V de a tel que $f_{|V}$ soit un difféomorphisme sur son image.

Exercice 3. (*) (coordonnées polaires)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

(1) On note U l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est un difféomorphisme local. Décrire U.

(2) Est ce que f restreinte à U est un difféomorphisme sur son image ?

(3) Pour tout point a de U, écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$, et trouver un voisinage ouvert V de a tel que $f_{|V}$ soit un difféomorphisme sur son image.

Exercice 4. (*) (coordonnées sphériques)
Mêmes questions que dans l'exercice précédent si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est définie par

$$f(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) & = x + x^2 \sin(\pi/x) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) & = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(0) \neq 0$.

(2) Si n est un entier pair non nul, montrer que :

$$f(1/(n+1)) < f(1/n) < f(1/(n+1/2))$$

et en déduire que f n'est injective sur aucun intervalle contenant 0, aussi petit soit-il.

(3) Commentaires ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On dit que f est *propre* si l'image réciproque de tout compact par f est compacte.

(1) Donner des exemples de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: propre mais pas continue, non propre mais continue, propre et continue.

(2) Si f est propre et continue, montrer que f est *fermée* (*i.e.*, l'image d'un fermé est fermée) ; On pourra montrer que, si F est fermé dans $\mathbb{R}^p$, alors $f(F)$ est séquentiellement fermé.

(3) On suppose que f est injective, propre, de classe $\mathcal{C}^1$, et est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^p$ (en particulier, $p = q$). Montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$.

Exercice 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + a \sin y, y + b \sin x) \end{aligned}$$

(1) Pour quelles valeurs de (a, b) f est-elle un difféomorphisme local en tout point ?

(2) Montrer alors que f est injective.

(3) Montrer alors que f est propre (cf. exercice précédent)

(4) Montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et s'il existe $k > 0$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > k$, alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui même (on pourra, par exemple, montrer que f est propre). Montrer que ce résultat est faux avec $k = 0$.

Exercice 9. (*) On considère une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :

$$\|f(y) - f(x)\| \geq k\|y - x\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

pour une certaine constante $k > 0$ et une norme quelconque (on dit que f est k-dilatante pour la norme en question). On veut montrer qu'alors f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui- même.

(1) Montrer que f est injective

(2) Montrer que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple en montrant qu'elle est séquentiellement fermée).

(3) Montrer que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et en déduire que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte dans $\mathbb{R}^n$.

(4) Conclure.

Exercice 10.

(1) Montrer que l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et déterminer sa différentielle en tout point.

(2) Montrer que toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de la matrice identité admet une racine carrée. Généraliser aux racines p-èmes, où p est un entier supérieur ou égal à 3.

Exercice 11. (*) On munit $\mathbb{R}^n$ de n'importe quelle norme, et l'on considère l'espace $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme d'opérateur subordonnée.

(1) Montrer que la série $\sum_{k\geq 0} A^k/k!$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$ quelle que soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. La somme de cette série est appelée l'exponentielle de A, et notée $\exp(A)$ ou e^A.

(2) Montrer que, pour chaque entier $k \geq 0$, l'application $u : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $u_k(A) := A^k/k!$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Donner une majoration de $\|Du_k(A)\|$. En déduire que la série $\sum_{k\geq 0} Du_k$ est uniformément convergente sur tout compact de E.

(3) Montrer que l'exponentielle $\exp : E \longrightarrow E$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que

$$D(\exp)(A)H = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!}(A^{k-1}H + A^{k-2}HA + \cdots + HA^{k-1}) \right)$$

(on admettra que si $\sum f_n$ est une série de fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, convergent simplement vers f sur U, et est telle que la série des différentielles converge uniformément sur tout compact, alors $Df(a) = \sum Df_n(a)$ pour tout $a \in U$.)

(4) Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de la matrice identité admet un "logarithme".

Partie II : Théorème des fonctions implicites

Exercice 12. Soit C la "courbe" de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0$.

(1) Montrer que, au voisinage du point $(0,0)$, l'ordonnée y d'un point de C est définie implicitement par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de x. On note φ une telle fonction.

(2) Calculer les dérivées première et seconde de φ en 0.

(3) Donner l'allure de la courbe C au voisinage du point $(0,0)$.

Exercice 13. Soit la courbe C définie par l'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$ et soit $a = (1,1)$. Vérifier que a est sur C. Trouver la tangente à C en a. Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en a.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $f(x,y) = 2\cos^2 x + xy - e^y$.

(1) Trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 tel que, pour tout x dans I, il existe un unique $y \in \mathbb{R}^{+*}$, que tel que $f(x,y) = 0$. On note $\varphi(x)$ un tel y.

(2) Montrer que la fonction $x \in I \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}^{+*}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(3) Montrer que $\varphi'(0) = \ln 2/2$.

(4) Montrer que, pour tout $x \in I$, on a :

$$\varphi'(x)(e^{\varphi(x)} - x) = \varphi(x) + 4\sin x \cos x.$$

Exercice 15. (*) Déterminer deux fonctions $\mathcal{C}^1$, y_1 et y_2, de x au voisinage de $(0,0)$ telles que, pour $i = 1$ ou 2, $(x, y_i(x))$ satisfait l'équation : $x^3 + xy + y^2 e^{x+y} = 0$ (on pourra poser $y = xz$). Calculer les dérivées de y_1 et y_2 en 0.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. On note C la "courbe" de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation $f(x,y,z) = 0$.

(1) Vérifier que le point $a = (1,1,1) \in C$.

(2) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 1, une boule ouverte $B \subset \mathbb{R}^2$ de centre $(1,1)$, et une fonction $\varphi \ : I \to B$ telle que : telle que $(x,y,z) \in C \cap I \times B$ si et seulement si $(y,z) = \varphi(x)$.

(3) Déterminer la tangente à C en a.

Exercice 17. Démontrer que la "courbe" définie par les équations $x^2+y^2+z^2 = 14$ et $x^3+y^3+z^3 = 36$ est une variété de classe $\mathcal{C}^1$. Préciser la tangente en chaque point.

Exercice 18. (*) Montrer que l'équation $z^3+2z+e^z-x-y^2 = \cos(x-y+z)$ définit implicitement z comme fonction $\mathcal{C}^1$ de x et y au voisinage de 0 qui s'annule en 0. Calculer les dérivées partielles de z à l'ordre 2 en 0.